/ Facundo

1	2	3	4	Nota
B	B	X	B-	7

APELLIDO Y NOMBRE N° DE LIBRETA:

CARRERA: Lic. Cs. de la Computación

TURNO: 9 a 14hs. A-K ☐ 9 a 14hs. L-Z ☐ 14 a 19hs. ☐ 17 a 22hs. ☒

Álgebra I

Primer Cuatrimestre 2024 - Primer Recuperatorio del **Primer parcial** - 12/07/2024

Ejercicio 1. Se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por

$$n \mathcal{R} m \iff 10 \mid n^2 + 4m^2 + m - 6n.$$

a) Probar que $n \mathcal{R} m \iff 5 \mid n^2 - m^2 + m - n$ y $n \equiv m \pmod 2$.

b) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Ejercicio 2. Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ la sucesión definida por

$$a_0 = 5 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = 4\Big(\sum_{j=0}^{n} a_j\Big) + 2n^2 - 11n - 8 \ \text{ si } \ n \geq 0.$$

Probar que para todo $n \geq 0$ se tiene $a_n = 2 \cdot 5^n - n + 3$.

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{F} = \{f : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\}$.

a) Determinar cuántas funciones $f \in \mathcal{F}$ satisfacen $\#\{x \in \mathrm{Dom}(f) \,/\, f(x) = 9\} = 2$.

b) Determinar cuántas funciones $f \in \mathcal{F}$ satisfacen $\#\mathrm{Im}(f) = 4$.

Ejercicio 4. Determinar el valor de

$$(6a^2 + 3b^2 : a^2 + b^2)$$

para cada par $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $(a : b) = 5$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen.

Justifique todas sus respuestas.

12/7/24
HOJA 1/4

① $nRm \iff 10 \mid n^2+4m^2+m-6n$

a) Probar que $nRm \iff \begin{cases} 5 \mid n^2-m^2+m-n \\ n \equiv m \ (2) \end{cases}$

$\underbrace{10 = 2.5}$

$$n^2+4m^2+m-6n \equiv 0 \ (\overset{10}{\overbrace{2.5}})$$

Como $2 \perp 5$

$$\iff \begin{cases} n^2+\underbrace{4m^2}_{\equiv 0(2)}+m-\underbrace{6n}_{\equiv 0(2)} \equiv 0 \ (2) \\ n^2+\underbrace{4m^2}_{\equiv(-1)\ (5)}+m\underbrace{-6n}_{\equiv -n\ (5)} \equiv 0 \ (5) \end{cases}$$

Ésta parte ya está probada (por mí ????)

$$\iff \begin{cases} n^2-m^2+m-n \equiv 0 \ (5) \iff \boxed{5 \mid n^2-m^2+m-n} \\ n^2+m \equiv 0 \ (2) \end{cases}$$

Tomo congruencias para llegar a lo q' quiero probar

Veo que sucede con una tabla de restos de doble entrada.

$r_2(n)$ / $r_2(m)$ \ $r_2(n^2)$	0	1
	0	1
0	0	1
1	1	0

aquí dentro hago la suma de los restos de dividir por 2 a n^2 y a m, y luego tomo resto nuevamente.

Se puede ver que $n^2+m \equiv 0 \ (2) \iff \boxed{n \equiv m \ (2)}$

De esta manera, queda probado el item a)

b) Para probar q' es una relación de equivalencia, tengo q' probar que es Reflexiva (R), Simétrica (S) y Transitiva (T).

- Sean $n, m, k \in \mathbb{Z}$:

• Reflexividad: Es reflexiva $\iff nRn$.

$nRn \iff \begin{cases} 5 \mid n^2-n^2+n-n \iff 5 \mid 0 \checkmark \text{ pues el 0 tiene infinitos divisores.} \\ \boxed{n \equiv n \ (2)} \checkmark \end{cases}$

$\therefore \mathcal{R}$ es Reflexiva !

- Simetría: $\mathcal{R}$ es una rel simétrica $\Leftrightarrow$ $n \mathcal{R} m \Rightarrow m \mathcal{R} n$

$$n \mathcal{R} m \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \mid n^2 - m^2 + m - n \\ n \equiv m \ (2) \Leftrightarrow -m \equiv -n \ (2) \underset{-1 \perp 2}{\Leftrightarrow} \boxed{m \equiv n \ (2)} \end{cases}$$

$$m \mathcal{R} n \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \mid m^2 - n^2 + n - m \\ m \equiv n (2) \end{cases} \Leftarrow \boxed{\text{Quiero probar esto !!}}$$

Ahora, me falta ver:

por propiedad de divisibilidad. Si $d \mid a \Leftrightarrow d \mid |a|$

$$5 \mid n^2 + m^2 + m - n \Leftrightarrow 5 \mid (-1)(n^2 - m^2 + m - n)$$
$$\Leftrightarrow 5 \mid -n^2 + m^2 - m + n$$
$$\underset{\text{reacomodando}}{\Leftrightarrow} \boxed{5 \mid m^2 - n^2 + n - m}$$

$n \mathcal{R} m \Rightarrow m \mathcal{R} n$ $\quad \therefore \mathcal{R}$ es simétrica !

- Transitividad: $n \mathcal{R} m \wedge m \mathcal{R} k \Rightarrow n \mathcal{R} k$?

$$n \mathcal{R} m \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \mid n^2 - m^2 + m - n \\ n \equiv m \ (2) \end{cases} \quad \text{y} \quad m \mathcal{R} k \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \mid m^2 - k^2 + k - m \\ m \equiv k \ (2) \end{cases}$$

Quiero ver que:

$$n \mathcal{R} k \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \mid n^2 - k^2 + k - n \\ n \equiv k \ (2) \end{cases}$$

Si $n \equiv m (2) \wedge m \equiv k (2) \underset{\text{por transitividad}}{\Rightarrow} \boxed{n \equiv k \ (2)}$

$$\begin{cases} n \equiv m (2) \Leftrightarrow \exists \alpha_1 \in \mathbb{Z},\ n = m + 2\alpha_1 \\ m \equiv k (2) \Leftrightarrow \exists \alpha_2 \in \mathbb{Z},\ m = k + 2\alpha_2 \end{cases}$$

sustituyo

$$\Rightarrow n = k + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \Leftrightarrow n = k + 2 \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{\in \mathbb{Z}} \Leftrightarrow \boxed{n \equiv k \ (2)}$$

12/7/24
HOJA 2/4

~~∴ R es Transitiva!~~
~~Ahora, R es (R), (S) y (T), Luego, R es una relación de equivalencia.~~

Todavía me falta probar la otra parte.

Como nRm y $mRk \iff \begin{cases} 5 \mid \overbrace{n^2-m^2+m-n}^{*} & (1) \\ 5 \mid \underbrace{m^2-k^2+k-m}_{**} & (2) \\ n \equiv k\,(2) \end{cases}$

Si $5 \mid *$ y $5 \mid ** \Rightarrow 5 \mid j.* + l.**$
(o la comb. lineal).
con $j, l \in \mathbb{Z}$.

Haga (1)+(2):

$5 \mid n^2 \cancel{-m^2} \cancel{+m} - n \cancel{+m^2} - k^2 + k \cancel{-m} \iff$

$\iff \boxed{5 \mid n^2-k^2+k-n}$

Ahora sí, probé que R es una relac. Transitiva!

∴ R es (R), (S) y (T); luego R es una relación de equivalencia

(4) $(6a^2+3b^2 : a^2+b^2) = d$ $\qquad (a:b)=5$

Por propiedad del mcd.

$d \mid (6a^2+3b^2 : a^2+b^2) \iff d \mid 6a^2+b^2 \wedge 6 \mid a^2+b^2$

Pero primero voy a coprimizar: $\begin{cases} a = 5a' \\ b = 5b' \end{cases}$ $\quad a' \perp b'$

$(6a^2+3b^2 : a^2+b^2) = (6(5a')^2+3(5b')^2 : (5a')^2+(5b')^2) = d \iff$

por propiedad: $(ka:kb) = |k|(a:b)$

$\iff d = 5^2 \underbrace{(6a'^2+3b'^2 : a'^2+b'^2)}_{d'}$, Ahora me queda hallar los posibles valores de d'.

$d|a \Rightarrow d|c.a \ , \ c \in \mathbb{Z}$

propiedad

multiplico por 6.

$\underbrace{5^2 . d' = d}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{d' | 6a'^2 + 6b'^2 \ \wedge \ d' | 6a'^2 + 3b'^2}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} d' | a'^2 + b'^2 \\ d' | 6a'^2 + 3b'^2 \end{cases}$

$\Rightarrow d' |$ resta

$\Leftrightarrow d' | \cancel{6a'^2} + 6b'^2 - \cancel{6a'^2} - 3b'^2$

$\Leftrightarrow d' | 3b'^2 \underset{b \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \boxed{d' | 3b'}$

$\Rightarrow$ multiplico por 3 $\left.\begin{matrix} d' | 3a'^2 + 3b'^2 \\ \wedge \\ d' | 6a'^2 + 3b'^2 \end{matrix}\right\}$ $d'|$ resta $\Rightarrow$

$d' | 6a'^2 + \cancel{3b'^2} - 3a'^2 - \cancel{3b'^2}$

$\Leftrightarrow d' | 3a'^2$

$\underset{a \in \mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \boxed{d' | 3a'}$

Ahora tengo que: $\begin{cases} d' | 3a' \\ d' | 3b' \end{cases} \Leftrightarrow d' | (3a' : 3b')$

$\Leftrightarrow d' | 3 \underbrace{(a' : b')}_{=1 \text{ pues } a' \perp b'}$

$\Leftrightarrow d' | 3$

$d' \in Div_+(3) = \{1, 3\}$

Ahora hay q' revisar que ~~3~~ 3 divida a ambas expresiones. ~~[illegible]~~

Veamos si $3 | d$:

$3|d \Leftrightarrow \begin{cases} 3 | 5^2 . (6a'^2 + 3b'^2) \longmapsto 3 \text{ es primo} \Rightarrow 3 | 5^2 \text{ ó } \overbrace{3 | (6a'^2 + 3b'^2)}^{\triangle} \\ 3 | 5^2 . (a'^2 + b'^2) \end{cases}$

pero $3 \nmid 5 \Rightarrow 3 \nmid 5^2$

Ahora, hay q' verificar que si 3 es candidato, tiene que cumplirse $\triangle$

12/7/24
HOJA 3/4

Revisemos si $3 | 6a'^2 + 3b'^2$, y con el razonamiento análogo acerca de que 3 primo, vamos a tener q' verificar luego, $3 | a'^2 + b'^2$

- $3 | 6a'^2 + 3b'^2$ Como $3|3$ y por consig. $3|6$, con $a', b' \in \mathbb{Z}$, se tiene q' $3|3b' \wedge 3|6a'$. Entonces $\boxed{3 | 6a' + 3b'}$ $\forall a', b' \in \mathbb{Z}$

- $3 | a'^2 + b'^2$ Lo chequeo con tabla de restos de doble entrada.

$r_3(b')$ \ $r_3(a')$		0	1	2
	$r_3(b'^2)$ \ $r_3(a'^2)$	0	1	1
0	0	0	1	1
1	1	1	2	2
2	1	1	2	2

$3 | a'^2 + b'^2$
$\Updownarrow$
$a'^2 + b'^2 \equiv 0\ (3) \Leftrightarrow$ ~~$a \equiv b\ (3)$~~ $\Leftrightarrow \begin{cases} a' \equiv 0\ (3) \\ b' \equiv 0\ (3) \end{cases}$

→ Sólo cuando $r_3(a') = 0 \wedge r_3(b') = 0$, $3 | d'$

Ésta ult. verificación con $(a' : b') = 1$, no pueden ser los 2 congruentes a 0 módulo 3

Luego $1 | d$ siempre. $(\forall a, b \in \mathbb{Z})$

$$d' = \begin{cases} 3 & \text{si } 3 | d' \Leftrightarrow a' \equiv 0\ (3) \wedge b' \equiv 0\ (3) \\ 1 & \text{si } 3 \nmid d' \end{cases}$$

$3|d \Leftrightarrow 5^2 \cdot 3 | d$

$$d = 5^2 \cdot d' = \begin{cases} 5^2 \cdot 3 & \text{si } a \equiv 0\ (5^2 \cdot 3) \wedge b \equiv 0\ (5^2\, 3) \Leftrightarrow \\ 5^2 & \text{si } 5^2 \cdot 3 \nmid d \Leftrightarrow 3 \nmid d \end{cases}$$

↓
Pues 5^2 la dividirá siempre por ser el resultado de coprimizar.

② $\begin{cases} a_0 = 5 \\ a_{n+1} = 4\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + 2n^2 - 11n - 8 \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$

Quiere probar por inducción que $p(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$

$P(n)$: " $a_n = 2.5^n - n + 3$ "

1°) Caso base: $p(0)\ V \iff a_0 = 2.5^0 - 0 + 3$

$\underset{def}{\iff} 5 = 2.5^0 + 3 \iff \boxed{5 = 2+3}$ ✓

$\boxed{P(0): V}$

2°) Paso inductivo: Sea $h \in \mathbb{N}_{\geq 0}$

$P(k)$ con $0 \leq k \leq h \Rightarrow P(h+1)$

Supongo

Chequeo q' se cumpla.

HI: $a_k = 2.5^k - k + 3$

~~QPQ~~ $\cancel{a_{h+1} = 4\left(\sum_{k=0}^{h} a_k\right) + 2h^2 - 11h - 8}$

QPQ: $\boxed{a_{h+1} = 2.5^{h+1} - (h+1) + 3 = 2.5^{h+1} - h + 2}$

Parto de aplicar la definición:

$$a_{h+1} \overset{def.}{=} 4\left(\sum_{k=0}^{h} a_k\right) + 2h^2 - 11h - 8$$

voy a poder aplicar la HI porque la sumatoria se mueve entre 0 y h, mismos valores en los q' tiene validez mi HI.

12/7/24
HOJA 4/4

$$a_{h+1} = 4\left(\sum_{k=0}^{h}(2.5^{k}-k+3)\right)+2h^2-11h-8$$

Separo la suma- y saco afuera coeficientes, para empezar a resolver.
toria

$$a_{h+1} = 4\left[\underbrace{2.\sum_{k=0}^{h}5^{k}}_{\text{Serie geom.}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{h}k}_{\text{Suma de Gauss}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{h}3}_{\text{suma de }(h+1)\text{ veces }3}\right] + 2h^2-11h-8$$

$$a_{h+1} = \cancel{4}.2.\frac{5^{h+1}-1}{\cancel{4}} - \overset{2}{\cancel{4}}.\frac{h(h+1)}{\underset{1}{\cancel{2}}} + 4.3(h+1)+2h^2-11h-8$$

$$a_{h+1} = 2.5^{h+1}-2-2(h^2+h)+12h+12+2h^2-11h-8$$

$$a_{h+1} = 2.5^{h+1}+2-\cancel{2h^2}-2h+12h+\cancel{2h^2}-11h$$

$$\boxed{a_{h+1} = 2.5^{h+1}-h+2}$$

Probé que $p(k),\ 0\leq k\leq h \Rightarrow p(h+1)$

Entonces, probé por inducción que $p(n)$ es válido $\forall n\in\mathbb{N}_{\geq 0}$.